

Lösung Aufgabe 1)

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Hilfsebene H : $g \in H$ und Richtungsvektor von h ist zweiter Spannvektor

$H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$H: -1x_1 - 2x_2 + 2x_3 = b$ setze $R(3|7|-3)$ ein
 $-1 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot (-3) = -23 = b$

$H: \frac{-x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 23}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 0$ Hesse Form von H
 $\frac{-x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 23}{3} = 0$

Abstand der beiden Geraden entspricht dem Abstand den der Punkt $Q(-3|-7|7) \in h$ von der Hilfsebene hat

$d(g; h) = d(Q; H) = \left| \frac{-(-3) - 2 \cdot (-7) + 2 \cdot (7) + 23}{3} \right| = \underline{\underline{18}}$

b) Baue Hilfsebene E : $g \in E \wedge P(0|0|2) \in E$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-7 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-7) \\ 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-7) - 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -16 \\ -11 \end{pmatrix}$

$E: 19x_1 - 16x_2 - 11x_3 = c$ P eingesetzt

$19 \cdot 0 - 16 \cdot 0 - 11 \cdot 2 = -22 = c \Rightarrow E: \underline{\underline{19x_1 - 16x_2 - 11x_3 = -22}}$

Schneide die Gerade h mit E : $E \cap h = \{A\}$

$19 \cdot (-3 + 2s) - 16(-7 + 2s) - 11 \cdot (7 + 3s) = -22$

$-22 - 27s = -22 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow A(-3|-7|7)$

Die gesuchte Gerade geht durch die Punkte P und A

$\Rightarrow k(P; A): \underline{\underline{\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3-0 \\ -7-0 \\ 7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}}$ oder $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$