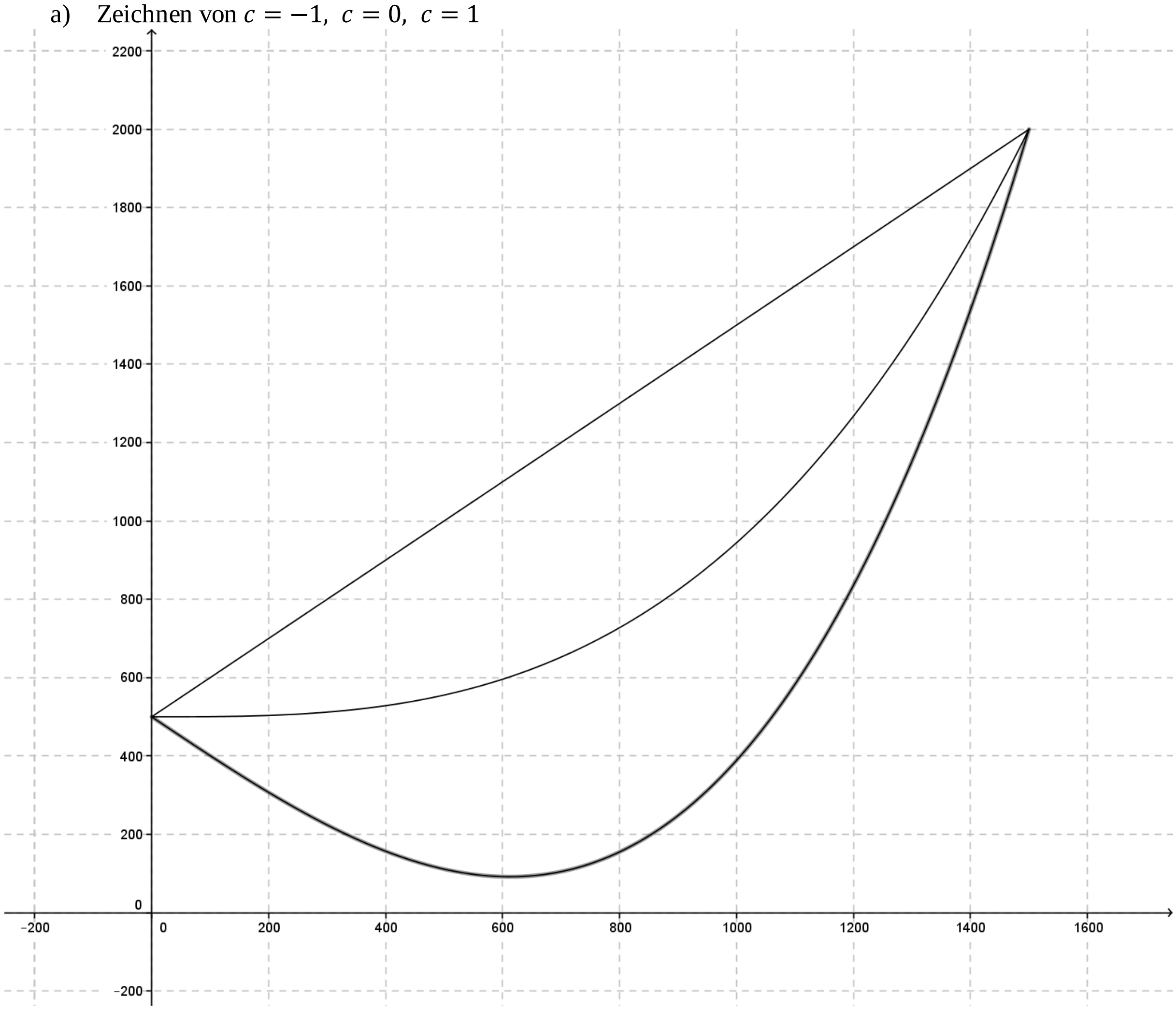
Musterlösung Aufgabe 74/14

a) Zeichnen von $c = -1,\ c = 0,\ c = 1$



b) Um die Funktionenschar auf wirklich alle gemeinsamen Punkte zu untersuchen, reicht der Blick ins Schaubild nicht aus, wir lösen:

$$f_{c_1}(x) = f_{c_2}(x)$$

$$\frac{1 + c_1}{1500^2} \cdot x^3 - c_1 x + 500 = \frac{1 + c_2}{1500^2} \cdot x^3 - c_2 x + 500$$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1500$$

$$f_c(0) = 500$$
$$f_c(1500) = 2000$$

<u>Antwort:</u> Daraus erhalten wir die gemeinsamen Punkte $P(0/500)$ und $Q(1500/2000)$.

c)

<u>Bestimmen des Minimum von f</u>

<u>Ansatz:</u> $f'_c(x) = 0 \; und \; f''_c(x) \neq 0$

$$f'_c(x) = \frac{3(1+c)}{1500^2} x^2 - c = 0$$

$$x_{1/2} = \pm 1500 \cdot \sqrt{\frac{c}{3(1+c)}} \; für \; c > 0$$

$$f''_c(x) = \frac{2 \cdot 3(1+c)}{1500^2} \cdot x$$

$$f''_c\left(+1500 \cdot \sqrt{\frac{c}{3(1+c)}}\right) = \frac{2 \cdot 3(1+c)}{1500^2} \cdot 1500 \cdot \sqrt{\frac{c}{3(1+c)}} > 0 \quad für \quad c > 0$$

Daraus ergibt sich der Tiefpunkt, an dem das Seil maximal durchhängt:

$$TP\left(1500 \cdot \sqrt{\frac{c}{3(1+c)}} \;\middle|\; f(1500 \cdot \sqrt{\frac{c}{3(1+c)}})\right)$$

Da das Seil an dieser Stelle 400m durchhängen soll, muss gelten:

$$f\left(1500 \cdot \sqrt{\frac{c}{3(1+c)}}\right) = 400$$

Mit dem GTR ergibt sich die

<u>Antwort:</u> Das Seil hängt für $c \approx 0{,}3428$ bis auf 400m über dem Meeresspiegel durch.

d)

Den Durchhang beschreiben wir mit der Differenzfunktion $d_c(x)$ zwischen dem durchhängenden Seil $f_c(x)$ und dem gespannten Seil $f_{-1}(x)$:

$$d_c(x) = f_{-1}(x) - f_c(x)$$

Für $c = 1$ ergibt sich also die Differenzfunktion

$$d_1(x) = f_{-1}(x) - f_1(x)$$

und mit Hilfe des GTR die

<u>Antwort:</u> Das Maximum der Differenzfunktion an der Stelle $x \approx 1154{,}7$

Für $c = -0{,}5$ ergibt sich also die Differenzfunktion

$$d_{0.5}(x) = f_{-1}(x) - f_{0,5}(x)$$

und mit Hilfe des GTR die

<u>Antwort:</u> Das Maximum der Differenzfunktion an der Stelle $x \approx 288{,}7$

<u>Alternativ</u> kann man dies auch „von Hand“ bestimmen:

$$d_c(x) = x + 500 - \left(\frac{1+c}{1500^2} \cdot x^3 - cx + 500\right) = -\frac{1+c}{1500^2} \cdot x^3 + (1+c) \cdot x$$

Für maximalen Durchhang suchen wir das Maximum der Differenzfunktion:

<u>Ansatz:</u> $d'_c(x) = 0 \; und \; d''_c(x) \neq 0$

$$d'_c(x) = \frac{-3(1+c)}{1500^2} x^2 + (1+c) = 0$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{1500^2}{3}} = \pm \frac{1500}{\sqrt{3}}$$

Die Maximalstelle ist also unabhängig von c.

$$d''_c(x) = \frac{-3 \cdot 2(1+c)}{1500^2} \cdot x$$

$$d''_c\left(\frac{1500}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-3 \cdot 2(1+c)}{1500^2} \cdot \frac{1500}{\sqrt{3}} < 0 \quad f\ddot{u}r\ c > -1$$

Daraus ergibt sich der maximale Durchhang des Seils für $c = 1$:

$$d_1\left(\frac{1500}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1+1}{1500^2} \cdot \left(\frac{1500}{\sqrt{3}}\right)^3 + (1+1) \cdot \frac{1500}{\sqrt{3}} = \frac{2000}{\sqrt{3}} \approx 1154{,}7$$

Daraus ergibt sich der maximale Durchhang des Seils für $c = -0{,}5$:

$$d_{-0,5}\left(\frac{1500}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1+(-0{,}5)}{1500^2} \cdot \left(\frac{1500}{\sqrt{3}}\right)^3 + \big(1+(-0{,}5)\big) \cdot \frac{1500}{\sqrt{3}} = \frac{500}{\sqrt{3}} \approx 288{,}7$$

Für den maximalen Durchhang von 40m muss gelten:

$$d_c\left(\frac{1500}{\sqrt{3}}\right) = 40$$

$$d_c\left(\frac{1500}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1+c}{1500^2} \cdot \left(\frac{1500}{\sqrt{3}}\right)^3 + (1+c) \cdot \frac{1500}{\sqrt{3}} = 40$$

Mit dem GTR ergibt sich die
Antwort: Die Bahn hat einen maximalen Durchhang von 40m mit $c \approx -0{,}9307$.

e)
Wenn die Steigung kleiner als 400% sein soll, muss gelten:

$$f'_c(x) < 4$$

$$f'_c(x) = \frac{3(1+c)}{1500^2} x^2 - c < 4$$

$f'_c(x)\ ist\ streng\ monoton\ steigend\ f$ür $0 \leq x \leq 1500$ (man überprüfe dies durch $f''_c(x) > 0$) und hat damit ein Randmaximum für $x = 1500$.

Wir brauchen also nur noch folgendes prüfen:

$$f'_c(1500) < 4$$

$$f'_c(1500) = \frac{3(1+c)}{1500^2} 1500^2 - c < 4$$

$$3 + 3c - c < 4$$

$$c < 0{,}5$$

Antwort: Für $c < 0{,}5$ wird die maximale Steigung kleiner als 400% sein.