

Ableitung der Sinus Funktion

Differenzenquotient

$$m(h) = \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h}$$

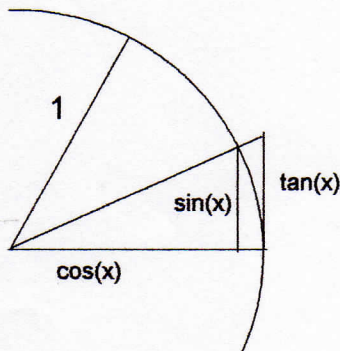
Aus Formelsammlung S 34

$$\sin a - \sin b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$m(h) = \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{x_0+h+x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_0+h-x_0}{2}\right)}{h} = \frac{\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

für $h \rightarrow 0$ gilt $\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \rightarrow \cos(x_0)$

Was geschieht mit $\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$ wenn $h \rightarrow 0$ strebt?



Wir setzen $\frac{h}{2} = x$

Was ist der Grenzwert von $\frac{\sin(x)}{x}$ für $x \rightarrow 0$

Wir machen eine Abschätzung

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{b \cdot r}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) < \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1 < \frac{1}{2} \cdot \tan(x) \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot 1 \quad | \cdot \frac{2}{\sin(x)}$$

$\cos(x) < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$ wird der Kehrwert gebildet ergibt sich

$$\frac{1}{\cos(x)} > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x)$$

für $x \rightarrow 0$ gilt: $\cos(x) \rightarrow 1$ und $\frac{1}{\cos(x)} \rightarrow 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = 1 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \right) = \cos(x_0)$$

\Rightarrow wenn $f(x) = \sin(x)$ dann gilt: $f'(x) = \cos(x)$