

7 Modellieren von geradlinigen Bewegungen LS 10 gelbe Ausgabe / 5. 90 - 91

1. Aufgabe:

	a) Zeit-Ort-Gleichung	b) Position nach ...	c) Geschwindigkeit
(1) $P(0 0 1)$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	<p>• nach 30 Minuten ($\hat{=} \frac{1}{2} h$): $\vec{OP}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P_1(1,5 2 1)$</p> <p>• nach 1 Stunden: $\vec{OP}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P_2(3 4 1)$</p>	$\left \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right $ $= \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}$ $= \sqrt{25}$ $= 5 \left[\frac{km}{h} \right]$
(2) $P(2 2 3)$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$	<p>• nach 30 Minuten ($\hat{=} \frac{1}{2} h$): $\vec{OP}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ $P_1(9,5 6 3)$</p> <p>• nach 1 Stunden: $\vec{OP}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ $P_2(17 10 3)$</p>	$\left \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right $ $= \sqrt{15^2 + 8^2 + 0^2}$ $= \sqrt{289}$ $= 17 \left[\frac{km}{h} \right]$
(3) $P(0 0 0,5)$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 14 \\ 45 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 45 \\ 2 \end{pmatrix}$	<p>• nach 30 Minuten ($\hat{=} \frac{1}{2} h$): $\vec{OP}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 45 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 22,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ $P_1(7 22,5 1,5)$</p> <p>• nach 1 Stunden: $\vec{OP}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 45 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 45 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ $P_2(14 45 2,5)$</p>	$\left \begin{pmatrix} 14 \\ 45 \\ 2 \end{pmatrix} \right $ $= \sqrt{14^2 + 45^2 + 2^2}$ $= \sqrt{2125}$ $= 5 \sqrt{85} = 47,17 \left[\frac{km}{h} \right]$
(4) $P(5 0 1)$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$	<p>• nach 30 Minuten ($\hat{=} \frac{1}{2} h$): $\vec{OP}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,25 \\ 4 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ $P_1(7,25 4 1,5)$</p> <p>• nach 1 Stunden: $\vec{OP}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ $P_2(10 8 2)$</p>	$\left \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \right $ $= \sqrt{5^2 + 8^2 + 1^2}$ $= \sqrt{84}$ $= 9 \left[\frac{km}{h} \right]$

2. Aufgabe:

a) $3 \text{ min} \hat{=} 180 \text{ s}; \vec{OP} = 180 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10800 \\ 5400 \\ 3600 \end{pmatrix}; P(10800|5400|3600)$
 $|\vec{OP}| = \sqrt{10800^2 + 5400^2 + 3600^2} = \sqrt{158.760.000} = 12600 \text{ [m]} \hat{=} \underline{\underline{12,6 \text{ km}}}$

b) $\left| \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{60^2 + 30^2 + 20^2} = \sqrt{4900} = 70 \left[\frac{m}{s} \right] \hat{=} \underline{\underline{252 \frac{km}{h}}}$

c) $20t = 500 \iff t = \underline{\underline{25 \text{ [s]}}}$

Aufgabe 3:

a) Zeit-Ort-Gleichung: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$; $\vec{OP}_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$; $P_2(6|20|30)$

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 13-5 \\ 10-2 \\ 17-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ für $n=3$

\Rightarrow für $n=1$ gilt: $\vec{v} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$

Zeit-Ort-Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{OP}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{3} \\ \frac{14}{3} \\ 14 \end{pmatrix}$; $P_2(17|14|14)$

c) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 30-5 \\ 22-7 \\ 32-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix}$ für $n=5$

\Rightarrow für $n=1$ gilt: $\vec{v} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Zeit-Ort-Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{OP}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 15 \end{pmatrix}$; $P_2(15|13|15)$

d) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 9-2 \\ 50-1 \\ 35-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 49 \\ 35 \end{pmatrix}$ für $n=7$

\Rightarrow für $n=1$ gilt: $\vec{v} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 49 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Zeit-Ort-Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{OP}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$; $P_2(4|15|10)$

Aufgabe 4 / Test:

a) $\vec{OP}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 50 \\ 1251 \end{pmatrix}$; $P_5(15|50|1251)$

b) $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 250 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 10^2 + 250^2} = \sqrt{62609} \approx 250,22 \left[\frac{\text{km}}{\text{min}} \right] \stackrel{!}{=} 15013,1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

c) $x_3 = 100$: $1 + 250t = 100 \Leftrightarrow 250t = 99 \Leftrightarrow t = \frac{99}{250} = 0,396 \text{ [min]}$
 $\stackrel{!}{=} \underline{\underline{23,76 \text{ s}}}$

Aufgabe 5:

a) Positionen nach 2h:

$\vec{OP}_1 = \begin{pmatrix} 44 \\ 20 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44+8 \\ 20+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 40 \end{pmatrix}$; $P_1(52|40)$

$\vec{OP}_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \end{pmatrix}$; $P_2(16|10)$

b) $b_1 \cap b_2$: $\begin{pmatrix} 44 \\ 20 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = t_2 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 \\ -20 \end{pmatrix}$

I $4t_1 - 8t_2 = -44 \Leftrightarrow t_1 - 2t_2 = -11$

II $10t_1 - 5t_2 = -20 \Leftrightarrow 2t_1 - t_2 = -4 \Leftrightarrow t_2 = 2t_1 + 4$

II in I: $t_1 - 2 \cdot (2t_1 + 4) = -11 \Leftrightarrow t_1 - 4t_1 - 8 = -11 \Leftrightarrow -3t_1 = -3 \Leftrightarrow t_1 = 1 \text{ [min]}$

$t_2 = 2 \cdot 1 + 4 = 6 \text{ [min]}$

$\vec{OS} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 30 \end{pmatrix}$; $S(48|30)$ ist der Schnittpunkt der Bootsrouten.

BRUNNEN

Boot 1 passiert S 1 Minute nach Beobachtungsbeginn, Boot 2 passiert S 6 Minuten nach Beobachtungsbeginn. Somit kollidieren die beiden Boote nicht.

6. Aufgabe:

$$a) |\vec{u}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5^2 + 12^2 + 0^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{13} \cdot 160 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Zeit-Ort-Gleichung: } \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b) |\vec{u}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 7^2 + (-14)^2} = \sqrt{625} = 25$$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{25} \cdot 150 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 42 \\ -144 \end{pmatrix}$$

$$\text{Zeit-Ort-Gleichung: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 42 \\ -144 \end{pmatrix}$$

7. Aufgabe / Test:

$$a) f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+5 \\ 5+15 \\ 6+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 21 \end{pmatrix} ; \underline{\underline{P_5 (8 | -10 | 21)}}$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ -3-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ f\u00fcr } t=1$$

$$\Rightarrow \text{f\u00fcr } t=1 \text{ gilt: } \vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}_0 = \vec{OP}_2 - 1 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5,5 \\ 5,5 \end{pmatrix}$$

$$f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 \\ 7+12,5 \\ 2+2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 19,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{P_5 (1 | 19,5 | 4,5)}}$$

$$b) \underline{f_1 \cap f_2}: \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$t_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 7-5 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad t_1 + t_2 = 3 \iff t_1 = 3 - t_2$$

$$\text{II in I: } -3 \cdot (3 - t_2) + 2,5 t_2 = 2 \iff -9 + 3 t_2 + 2,5 t_2 = 2$$

$$\iff 5,5 t_2 = 11 \iff t_2 = 2; \quad t_1 = 3 - 2 = 1$$

$$\text{Probe in III: } 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-0,5) = 3 - 1 = 2 \neq -4 \rightarrow \text{Widerspruch}$$

\(\Rightarrow\) Die Flugbahnen verlaufen windschief zueinander; somit ist eine

Kollision der Flugzeuge ausgeschlossen.

8. Aufgabe:

a) $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 10-1 \\ 15-5 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ $|\vec{AC}| = \sqrt{9^2+10^2+1^2} = \sqrt{165} \approx \underline{\underline{12,85 \text{ [Km]}}}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 4-1 \\ 8-5 \\ 1-0 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{6} = 3$

$\vec{v} = \frac{1}{3} \cdot 90 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 30 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -30 \\ 60 \end{pmatrix}$

f: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ -30 \\ 60 \end{pmatrix}$

b \cap f: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ -30 \\ 60 \end{pmatrix}$

$t_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-2 \\ 15-5 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

I $2t_1 + 30t_2 = 8 \iff t_1 + 15t_2 = 4 \iff t_1 = 4 - 15t_2$

I in II: $3 \cdot (4 - 15t_2) + 60t_2 = 10 \iff 12 - 45t_2 + 60t_2 = 10 \iff 15t_2 = -2$

$\iff t_2 = -\frac{2}{15}$; $t_1 = 4 + 15 \cdot \frac{2}{15} = 6$

Probe in III: $6 - \frac{2}{15} \cdot (-60) = 6 + 8 = 14 \neq 1 \rightarrow$ Widerspruch!

Die Routen der beiden Flugobjekte verlaufen windschief zueinander, somit ist eine Kollision ausgeschlossen.

Grundwissen Test

9. Aufgabe:

a) (1) $\log_{10}(1000) = x \iff 10^x = 10^3 \iff x = 3$

(2) $\log_2(32) = x \iff 2^x = 2^5 \iff x = 5$

(3) $\log_3(81) = x \iff 3^x = 3^4 \iff x = 4$

(4) $5 \cdot \log_2(1) = x \iff \log_2(1) = \frac{x}{5} \iff 2^{\frac{x}{5}} = 2^0 \iff x = 0$

b) (1) $\log(x) = 1 \iff 10^1 = x \iff x = 10$

(2) $\log(x) = 6 \iff 10^6 = x \iff x = 1000000$

(3) $2 \log(x) = 4 \iff \log(x) = 2 \iff 10^2 = x \iff x = 100$

(4) $\log(10^x) = 5 \iff 10^5 = 10^x \iff x = 5$