5 Gegenseitige Lage von Geraden – zueinander parallele Geraden

LS 10 gelbe Ausgabe / S. 83 – 84

1. Aufgabe:

• Die Geraden sind zueinander parallel

II $\quad t\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\-6\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}5t&=-15 \Leftrightarrow t=-3\\2t&=-6 \Leftrightarrow t=-3\\-t&=3 \Leftrightarrow t=-3\end{aligned}$

d.h. $g \parallel i$

V $\quad t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\10\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}t&=5\\t&=5\\2t&=10 \Leftrightarrow t=5\end{aligned}$

d.h. $h \parallel j$

• Die Geraden sind nicht zueinander parallel

I $\quad t\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}5t&=1 \Leftrightarrow t=\tfrac{1}{5}\\2t&=1 \Leftrightarrow t=\tfrac{1}{2}\\-t&=2 \Leftrightarrow t=-2\end{aligned}$

d.h. Widerspruch; daher $g \nparallel h$

III $\quad t\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\10\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}5t&=5 \Leftrightarrow t=1\\2t&=5 \Leftrightarrow t=\tfrac{5}{2}\\-t&=10 \Leftrightarrow t=-10\end{aligned}$

d.h. Widerspruch; daher $g \nparallel j$

IV $\quad t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\-6\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}t&=-15\\t&=-6\\2t&=3 \Leftrightarrow t=\tfrac{3}{2}\end{aligned}$

d.h. Widerspruch; daher $h \nparallel i$

VI $\quad t\cdot\begin{pmatrix}-15\\-6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\10\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}-15t&=5 \Leftrightarrow t=-\tfrac{1}{3}\\-6t&=5 \Leftrightarrow t=-\tfrac{5}{6}\\3t&=10 \Leftrightarrow t=\tfrac{10}{3}\end{aligned}$

d.h. Widerspruch; daher $i \nparallel j$

2. Aufgabe:

a) • $s\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned}2s&=4 \Leftrightarrow s=2\\4s&=8 \Leftrightarrow s=2\\s&=2\end{aligned}\right\}$ Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander.

• Punktprobe von P(1|2|3) in h: $\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow s\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\-1\end{pmatrix}$

$\left.\begin{aligned}&\text{I} & 4s&=-2 \Leftrightarrow s=-\tfrac{1}{2}\\&\text{II} & 8s&=-4 \Leftrightarrow s=-\tfrac{1}{2}\\&\text{III} & 2s&=-1 \Leftrightarrow s=-\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\}\ P\in h$

d.h. g und h sind zueinander parallel und identisch.

b) • $s\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned}s&=\tfrac{1}{3}\\3s&=1 \Leftrightarrow s=\tfrac{1}{3}\\9s&=3 \Leftrightarrow s=\tfrac{1}{3}\end{aligned}\right\}$ Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander.

• Punktprobe von Q(0|7|3) in h: $\begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow s\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\5\\3\end{pmatrix}$

$\left.\begin{aligned}&\text{I} & \tfrac{1}{3}s&=-6 \Leftrightarrow s=-18\\&\text{II} & s&=5\\&\text{III} & 3s&=3 \Leftrightarrow s=1\end{aligned}\right\}\ Q\notin h$

d.h. g und h sind zueinander parallel und verschieden.

1. Aufgabe:

c) · $s\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0,5\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2s=-1 \Leftrightarrow s=-\frac{1}{2}\\ 2s=-1 \Leftrightarrow s=-\frac{1}{2}\\ -s=\frac{1}{2} \Leftrightarrow s=-\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander.

· Da g und h denselben Stützpunkt R(1|1|0) besitzen, gilt:

g und h sind zueinander parallel und identisch.

d) · $s\cdot\begin{pmatrix}8\\-7\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3,5\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8s=-4 \Leftrightarrow s=-\frac{1}{2}\\ -7s=\frac{7}{2} \Leftrightarrow s=-\frac{1}{2}\\ 0s=0 \Leftrightarrow 0=0\end{array}\right\}$ Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander.

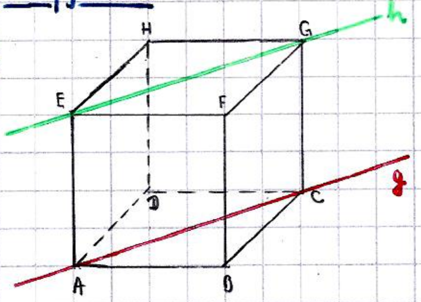
· Punktprobe mit S(3|9|8) in h: $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\3,5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\9\\8\end{pmatrix} \Leftrightarrow s\cdot\begin{pmatrix}-4\\3,5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\8\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & -4s=3 & \Leftrightarrow s=-\frac{3}{4}\\ \text{II} & \frac{7}{2}s=5 & \Leftrightarrow s=\frac{10}{7}\\ \text{III} & 0s=8 & ↯\end{array}\right\}$ $S \notin h$

d.h. g und h sind zueinander parallel und verschieden.

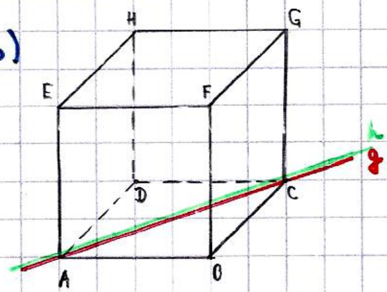
3. Aufgabe:

a)



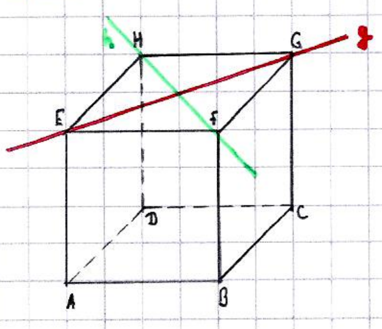
g und h sind zueinander parallel und verschieden.

b)



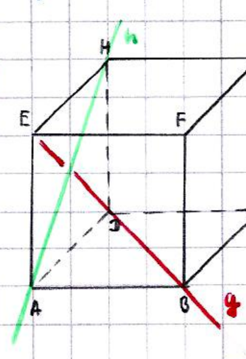
g und h sind zueinander parallel und identisch.

c)



g und h sind nicht zueinander parallel und schneiden sich.

d)



g und h sind nicht zueinander parallel und schneiden sich nicht; d.h. sie sind windschief.

4. Aufgabe / Test:

- $s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2s = -2 \Leftrightarrow s = -1 \\ 3s = -3 \Leftrightarrow s = -1 \\ -s = 1 \Leftrightarrow s = -1 \end{array}\right\}$ Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander.

- Punktprobe mit $P(11|5|2)$ in h: $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & -2s = 4 \Leftrightarrow s = -2 \\ \text{II} & -3s = 6 \Leftrightarrow s = -2 \\ \text{III} & s = -2 \end{array}\right\}$ $P \in h$

d.h. g und h sind zueinander parallel und identisch.

5. Aufgabe:

a) $g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

- $t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4t = -2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \\ 6t = 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \\ 12t = 6 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander.

- Punktprobe mit $A(0|0|0)$ in h: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & -2s = 0 \Leftrightarrow s = 0 \\ \text{II} & 3s = 0 \Leftrightarrow s = 0 \\ \text{III} & 6s = -5 \Leftrightarrow s = -\frac{5}{6} \end{array}\right\}$ $A \notin h$

d.h. g und h sind zueinander parallel und verschieden.

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

- $t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0t = -2 \Leftrightarrow ↯ \\ -3t = 3 \Leftrightarrow t = -1 \\ 5t = 6 \Leftrightarrow t = \frac{6}{5} \end{array}\right\}$ Widerspruch; d.h. die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen voneinander.

d.h. g und h sind nicht zueinander parallel.

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -18 \end{pmatrix}$

- $t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6t = -2 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \\ -9t = 3 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \\ -18t = 6 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \end{array}\right\}$ Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander.

- Punktprobe von $A(-4|6|17)$ in h: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & -2t = -4 \Leftrightarrow t = 2 \\ \text{II} & 3t = 6 \Leftrightarrow t = 2 \\ \text{III} & 6t = 12 \Leftrightarrow t = 2 \end{array}\right\}$ $A \in h$

d.h. g und h sind zueinander parallel und identisch.

5. Aufgabe:

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

- $t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2t = -2 \Leftrightarrow t = -1 \\ -3t = 3 \Leftrightarrow t = -1 \\ -6t = 6 \Leftrightarrow t = -1 \end{array}\right\}$ Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander.

- Punktprobe mit $A(0|0|7)$ in h: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & -2s = 0 \Leftrightarrow s = 0 \\ \text{II} & 3s = 0 \Leftrightarrow s = 0 \\ \text{III} & 6s = 2 \Leftrightarrow s = \frac{1}{3} \end{array}\right\} A \notin h$$

d.h. g und h sind zueinander parallel und verschieden.

6. Aufgabe:

a) $p: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $B(0|0|x_3)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0-10 \\ 0+8 \\ x_3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ x_3+3 \end{pmatrix}$

- $s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ x_3+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 5s = -10 \Leftrightarrow s = -2 \\ -4s = 8 \Leftrightarrow s = -2 \end{array}$

III $-2 \cdot 2 = x_3 + 3 \Leftrightarrow -4 = x_3 + 3 \Leftrightarrow x_3 = -7$ d.h. $B(0|0|-7)$

c) $\vec{OM_{AB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8-2 \\ 9-1 \\ 13-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 1+4 \\ 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$; $M_{AB}(5|5|9)$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

7. Aufgabe:

- $s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s = -2 \\ s = -2 \\ -2s = 4 \Leftrightarrow s = -2 \end{array}\right\}$ Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander.

- Punktprobe mit $P(2|5|6)$ in h: $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & -2t = -2 \Leftrightarrow t = 1 \\ \text{II} & -2t = -2 \Leftrightarrow t = 1 \\ \text{III} & 4t = -2 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} P \notin h$$

d.h. g und h sind zueinander parallel und verschieden.

- Gleichung der Mittelparallelen m:

m besitzt als Stützpunkt den Mittelpunkt der Strecke der Stützvektoren von g und h:

$\vec{OM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4-2 \\ 7-5 \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 5+1 \\ 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$; $M(3|6|7)$

$m: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

8. Aufgabe / Test:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Punktprobe mit $O(0|0|0)$ in g: $\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow t\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-5\\-2\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & 4t = -3 & \Leftrightarrow t = -\frac{3}{4} \\ \text{II} & 2t = -5 & \Leftrightarrow t = -\frac{5}{2} \\ \text{III} & -t = -2 & \Leftrightarrow t = 2 \end{array}\right\} \underline{O \notin g}$$

d.h. O liegt nicht auf g.

$$\underline{\underline{h: \vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}}}$$

9. Aufgabe:

a) $\overrightarrow{OM_a} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}9-1\\5-1\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+4\\1+2\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}$; $\underline{\underline{M_a(5|3|2)}}$

$\overrightarrow{OM_b} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}9\\5\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-3-9\\-1-5\\7-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9-6\\5-3\\3+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$; $\underline{\underline{M_b(3|2|5)}}$

$\overrightarrow{OM_c} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\7\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3+3\\7+1\\5-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3+3\\-1+4\\7-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}$; $\underline{\underline{M_c(0|3|6)}}$

$\overrightarrow{OM_d} = \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1-3\\1-7\\1-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-1\\7-3\\5-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$; $\underline{\underline{M_d(2|4|3)}}$

$\overrightarrow{M_aM_b} = \begin{pmatrix}3-5\\2-3\\5-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{M_aM_b}| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{M_dM_c} = \begin{pmatrix}0-2\\3-4\\6-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{M_dM_c}| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{M_bM_c} = \begin{pmatrix}0-3\\3-2\\6-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{M_bM_c}| = \sqrt{(-3)^2+1^2+1^2} = \sqrt{11}$

$\overrightarrow{M_aM_d} = \begin{pmatrix}2-5\\4-3\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{M_aM_d}| = \sqrt{(-3)^2+1^2+1^2} = \sqrt{11}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{M_aM_b} = \overrightarrow{M_dM_c} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{M_aM_b}| = |\overrightarrow{M_dM_c}| = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{M_bM_c} = \overrightarrow{M_aM_d} = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{M_bM_c}| = |\overrightarrow{M_aM_d}| = \sqrt{11}$

d.h. das Viereck $M_a M_b M_c M_d$ ist ein Parallelogramm.

b) $\overrightarrow{OM_a} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{OM_b} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\vec{b}$

d.h. $\overrightarrow{M_aM_b} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\vec{b} - (\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\vec{a})$

$\overrightarrow{M_aM_b} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{M_aM_b} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{M_aM_b} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\underline{\overrightarrow{M_aM_b}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \underline{\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}$

9. Aufgabe:

b) $\cdot\ \overrightarrow{OM_d} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\vec{d}$

$\cdot\ \overrightarrow{OM_c} = \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2}\vec{c}$

d.h. $\overrightarrow{M_dM_c} = \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2}\vec{c} - (\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\vec{d})$

$\overrightarrow{M_dM_c} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$

$\overrightarrow{M_dM_c} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$

$\overrightarrow{M_dM_c} = -\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$

$\overrightarrow{M_dM_c} = -\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d} = -\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$

Außerdem gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{I} & \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b} \\ \mathrm{II} & \overrightarrow{AC} = -\vec{c} - \vec{d} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} - \vec{d} \\ \vec{a} + \vec{b} = -(\vec{c} + \vec{d}) \end{array}$$

$\Longrightarrow \overrightarrow{M_dM_c} = -\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}) = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) = \overrightarrow{M_aM_b}$ q.e.d.

Grundwissen Test

10. Aufgabe:

a) $\sqrt{x} = 25$

$x = 625$

$\mathbb{L} = \{625\}$

b) $\sqrt{2x+1} = 5$

$2x+1 = 25$

$2x = 24$

$x = 12$

$\mathbb{L} = \{12\}$

c) $\sqrt{x^2+1} = 2$

$x^2+1 = 4$

$x^2 = 3$

$|x| = \sqrt{3}$

$\mathbb{L} = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

d) $\sqrt{x-5} = 5$

$x-5 = 25$

$x = 30$

$\mathbb{L} = \{30\}$

e) $\sqrt{x} - 3 = 8$

$\sqrt{x} = 11$

$x = 121$

$\mathbb{L} = \{121\}$

f) $\sqrt{x-5} + 2 = 3$

$\sqrt{x-5} = 1$

$x-5 = 1$

$x = 6$

$\mathbb{L} = \{6\}$

g) $\sqrt{2x-1} = x \Leftrightarrow 2x-1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\mathbb{L} = \{1\}$

h) $\sqrt{x^2+13} = 7 \Leftrightarrow x^2 + 13 = 49 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow |x| = 6$;

$\mathbb{L} = \{-6; 6\}$