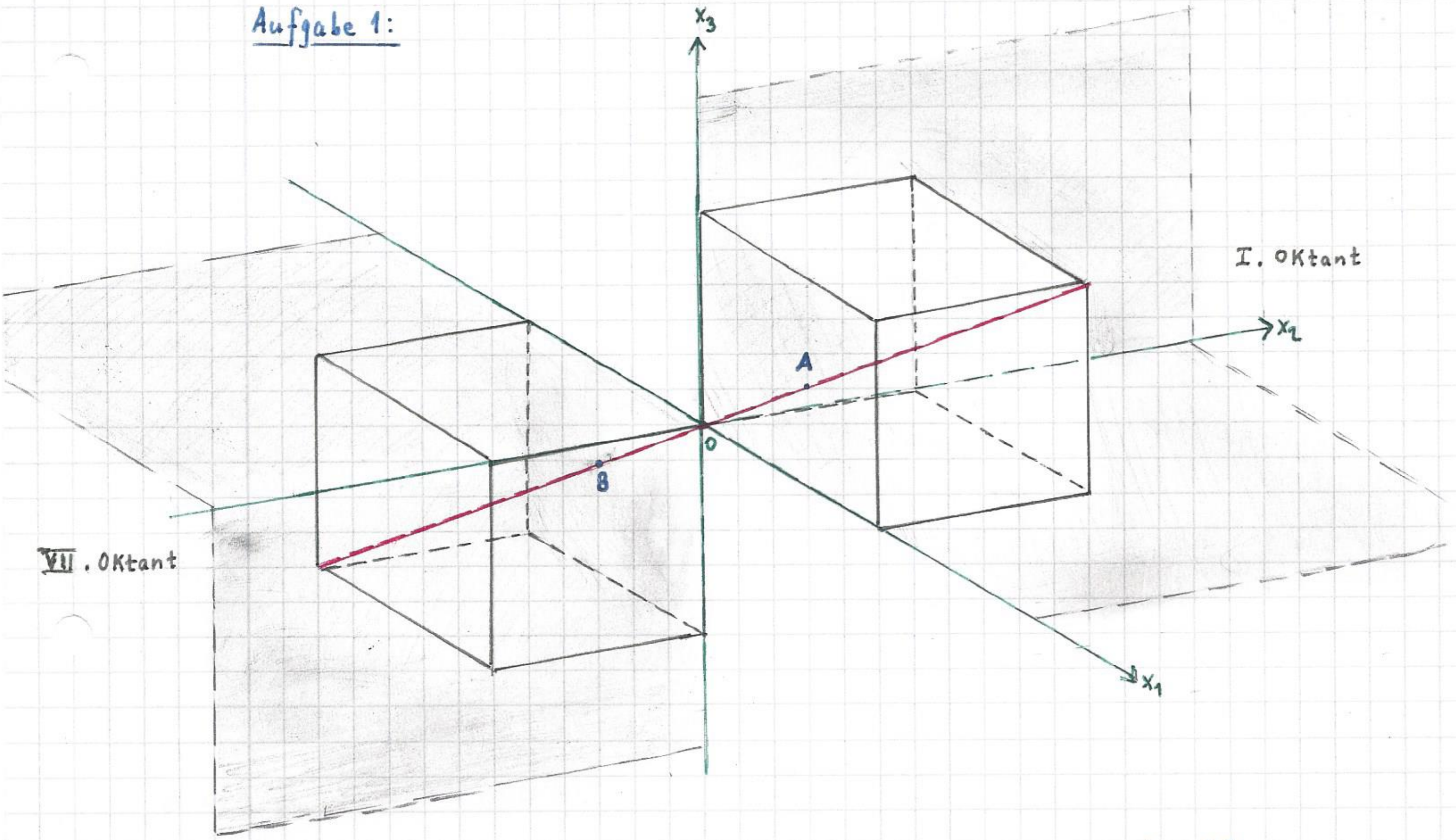
Wiederholen - Vertiefen - Vernetzen / LS S. 97 / 98 / 99

Aufgabe 1:

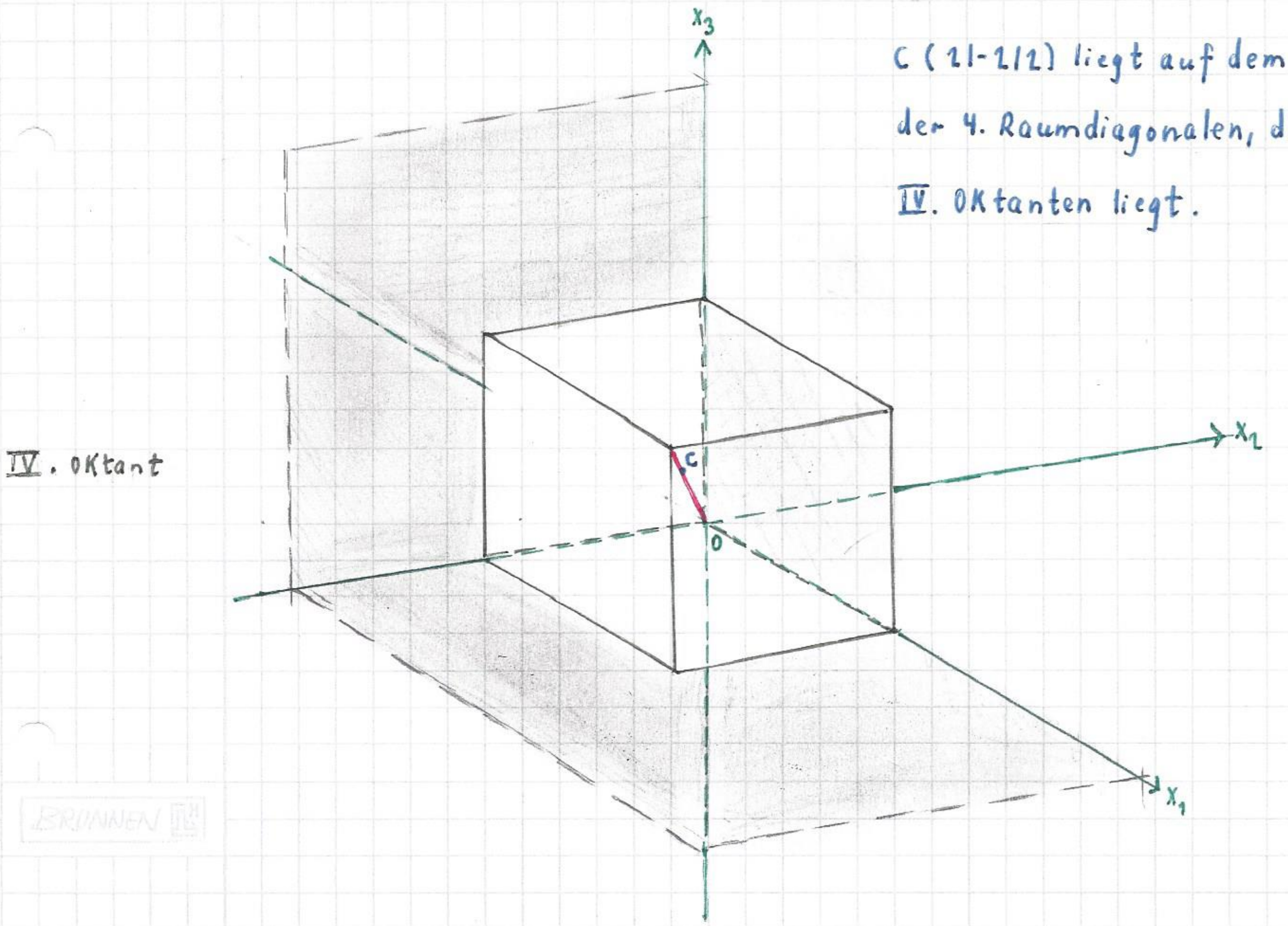


A (1|1|1) und B (-1|-1|-1) liegen auf der 1. Raumdiagonalen des $\mathbb{R}^3$.

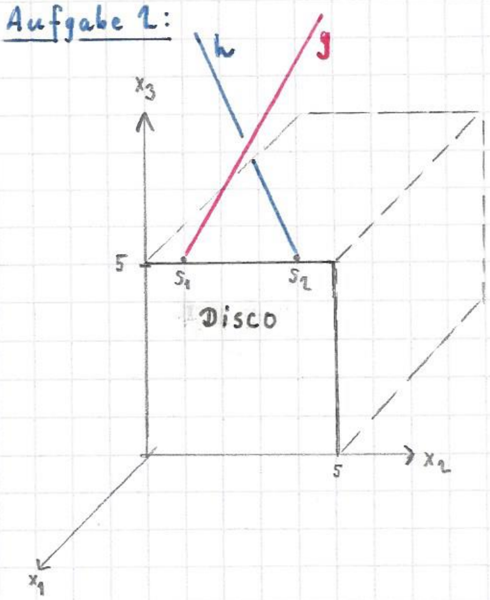
A liegt auf dem Abschnitt der Raumdiagonalen, der im I. OKtanten liegt.

B liegt auf dem Abschnitt der Raumdiagonalen, der im VII. OKtanten liegt.

C (2|-2|2) liegt auf dem Abschnitt der 4. Raumdiagonalen, die im IV. OKtanten liegt.



Aufgabe 1:



Wahl der Stützpunkte der jeweiligen Geraden:

$S_1(0|1|5)$ ist der Stützpunkt der roten Geraden g

$S_2(0|4|5)$ ist der Stützpunkt der blauen Geraden h

Die Strahler sind auf einem Gebäude angebracht, das gemäß Zeichnung 5 Meter breit und 5 Meter hoch ist.

a) $g \cap h = \{P\}$:

Wahl eines Richtungsvektors von g: $\vec{r_g} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

d.h. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}; \; t \in \mathbb{R}$

Wenn g und h sich in P schneiden sollen, liegt dieser Punkt auf beiden Geraden. Wahl eines Punktes P auf g: $\vec{OP} = \begin{pmatrix}0+1\\1+2\\5+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\8\end{pmatrix}$

d.h. man wählt $P(1|3|8)$ als den gemeinsamen Schnittpunkt von g und h.

Somit gilt für den Richtungsvektor $\vec{r_h}$ von h: $\vec{r_h} = \begin{pmatrix}1-0\\3-4\\8-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

d.h. $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}; \; r \in \mathbb{R}$

Somit schneiden sich g und h in $P(1|3|8)$.

b) $g \parallel h$:

Die Richtungsvektoren $\vec{r_g}$ und $\vec{r_h}$ müssen kollinear (linear abhängig) sein.

Dies gilt z.B. für: $\vec{r_h} = -2 \cdot \vec{r_g} = -2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix}$

Zwar sind $\vec{r_g}$ und $\vec{r_h}$ in diesem Fall entgegengesetzt orientiert und $\vec{r_h}$ ist doppelt so lang wie $\vec{r_g}$, aber die Vektoren beschreiben die gleiche Richtung.

c) z.B. $\vec{r_g} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{r_h} = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

a) Spiegelung an der $x_1 x_2$- Ebene ($x_3 = 0$) ; d.h. das Vorzeichen der x_3-Komponenten verändert sich:

A (2|0|0) $\longrightarrow$ A' (2|0|0) (ist Fixpunkt der $x_1 x_2$ - Ebene)

B (-1|2|-1) $\longrightarrow$ B' (-1|2|1)

C (-2|3|4) $\longrightarrow$ C' (-2|3|-4)

D (3|4|-2) $\longrightarrow$ D' (3|4|2)

b) Spiegelung an der $x_2 x_3$- Ebene ($x_1 = 0$); d.h. das Vorzeichen der x_1-Komponenten verändert sich

A (2|0|0) $\longrightarrow$ A' (-2|0|0)

B (-1|2|-1) $\longrightarrow$ B' (1|2|-1)

C (-2|3|4) $\longrightarrow$ C' (2|3|4)

D (3|4|-2) $\longrightarrow$ D' (-3|4|-2)

Anmerkung: Analog verändert sich das Vorzeichen der x_2- Komponenten bei der Spiegelung an der $x_1 x_3$ - Ebene ($x_2 = 0$).

Bei der Punktspiegelung eines Punktes A am Ursprung O(0|0|0) verändern sich die Vorzeichen aller drei Komponenten.

Bsp.: A (1|2|3) $\longrightarrow$ A' (-1|-2|-3)

Aufgabe 4:

a) $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{d} = -\overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$

b) $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{d}$; $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{d} + \overrightarrow{e}$; $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{e} + \overrightarrow{d}$

Aufgabe 5:

a) Koordinaten: linke Zimmerecke unten soll im Ursprung O(0|0|0) liegen und wird mit D bezeichnet.

A(4|0|0) ; B(4|6|0) ; C(0|6|0) ; D(0|0|0) ; E (0|0|2)

b) $g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OE} + r \cdot \overrightarrow{EB}$; $r \in \mathbb{R}$

$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

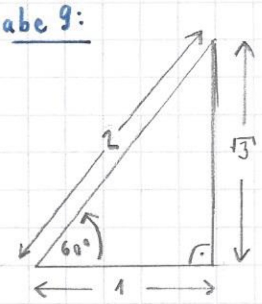
$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

c) d durch D*(0|0) und B*(4|6)

$m = \frac{6-0}{4-0} = \frac{3}{2}$; $c = 0$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2} x$

Aufgabe 9:

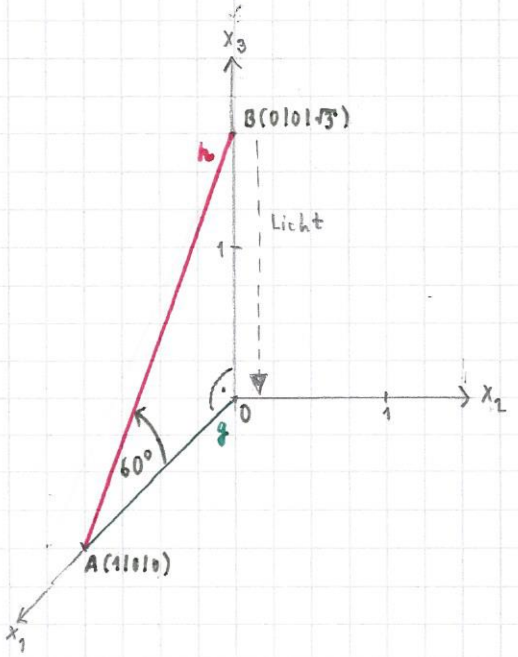


$\tan(60°) = \sqrt{3}$

d.h. Ankathete $a = 1$
Gegenkathete $g = \sqrt{3}$

Stablänge $l = \sqrt{3+1} = 2$

a)



Anmerkung: Man kann den Stab auch anders in das Koordinatensystem legen.
Entsprechend verändern sich die Koordinaten der Eckpunkte sowie die Gleichungen der Schattengeraden und des beleuchteten Stabes.

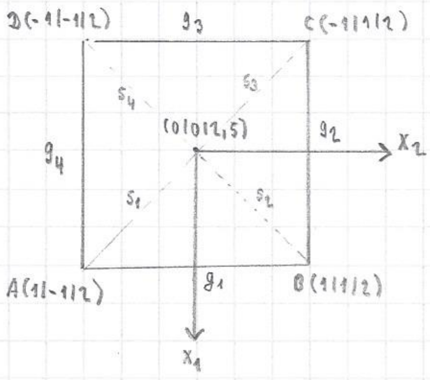
b) $g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$ beschreibt die "Schattengerade"

c) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ beschreibt den beleuchteten Stab.

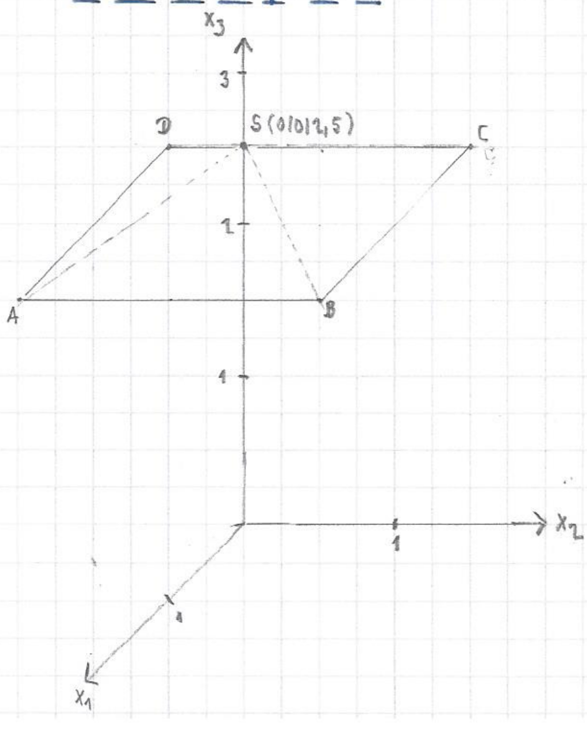
Aufgabe 10:

$A = 4\,m^2$; d.h. die quadratischen Seitenlängen betragen 2 m.

a) Orthogonale Projektion:



Koordinatensystem:



Anmerkung: Je nach Lage des Sonnenschirms im Koordinatensystem verändern sich die Eckpunkte und Spitze der Pyramide und somit auch die folgenden Gleichungen der Pyramidenkanten.

Aufgabe 10:

b) • Gleichungen der Grundkanten:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

$$g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ u \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ u \in \mathbb{R}$$

• Gleichungen der Seitenkanten:

$$s_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad s_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

$$s_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad s_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

$$s_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad s_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

$$s_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad s_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ u \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 11:

Parallele Geraden besitzen linear abhängige Richtungsvektoren.

a) $h^*: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{r_h};\ t \in \mathbb{R}$

$h^*: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$

b) $h^*: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{r_h};\ t \in \mathbb{R}$

$h^*: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 12:

geg: g_a verläuft durch $Q(0|0|2)$ und $P(2|2|a) \Rightarrow g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ a-2 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$

a) $A(0|1|2)$ und $B(2|0|1)$ liegen auf $g \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

$g \cap g_a = \{S\}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ a-2 \end{pmatrix};\ r, t, a \in \mathbb{R}$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ r, t, a \in \mathbb{R}$$

t	s	
1	-1	0
-1	-2	-1
-1	2-a	0
1	-1	0
0	-3	-1
0	1-a	0

$\Rightarrow t = \frac{2}{3}$
$\Rightarrow s = \frac{1}{3}$

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{1}{3} \\ 2 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ $S(\frac{2}{3}|\frac{2}{3}|\frac{5}{3})$

$\hookrightarrow (1-a) \cdot \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$

Für $\underline{\underline{a = 1}}$ schneiden sich g und g_1 in $\underline{\underline{S(\frac{2}{3}|\frac{2}{3}|\frac{5}{3})}}$.

Aufgabe 12

b) $C(1|2|2)$ und $D(2|1|0)$ liegen auf $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix};\ s\in\mathbb{R}$

$h \cap g_a = \{S\}$: $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\a-2\end{pmatrix};\ s,t,a\in\mathbb{R}$

$$s\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\2-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix};\ r,s,a\in\mathbb{R}$$

s	t	
1	-2	-1
-1	-2	-2
-2	2-a	0
2	-4	-2
0	-4	-3
0	-2-a	-2

$\Rightarrow 2s = 4t-2 = 3-2 \rightarrow 2s = 1 \rightarrow s = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -4t = -3 \Rightarrow t = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{3}{4}(2+a) = 2 \Rightarrow 2+a = \frac{8}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}1+0{,}5\\2-0{,}5\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\1\end{pmatrix} \quad S(1{,}5|1{,}5|1)$$

Für $a = \frac{2}{3}$ schneiden sich h und $g_{\frac{2}{3}}$ in $S(1{,}5|1{,}5|1)$.

Aufgabe 13:

Wahl eines Würfels mit Kantenlänge $a = 2\,cm$. Die hintere linke Würfelkante soll im Ursprung $O(0|0|0)$ liegen und wird mit D bezeichnet.

Koordinaten: $A(2|0|0)$ $B(2|2|0)$ $C(0|2|0)$ $D(0|0|0)$
$E(2|0|2)$ $F(2|2|2)$ $G(0|2|2)$ $H(0|0|2)$
$M(2|1|0)$ $N(0|1|2)$

$MN: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$; bzw. $MN: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$

$d: \vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix};\ r\in\mathbb{R}$; bzw. $d: \vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ r\in\mathbb{R}$

$MN \cap d$: $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ t,r\in\mathbb{R}$

$$t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix};\ t,r\in\mathbb{R}$$

t	r	
1	1	2
0	1	1
-1	1	0
1	1	2
0	1	1
0	2	2
1	1	2
0	1	1
0	0	0

$\Rightarrow r = 1$

$\overrightarrow{OS} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ $S(1|1|1)$ ist der Schnittpunkt von MN und d.

Anmerkung: Das Ergebnis verändert sich je nach Wahl der Kantenlänge und der Lage des Würfels im Koordinatensystem.

Aufgabe 14:

Bestimmung von P, Q und R: $P(-3|0|0)$; $R(-6|4|0)$; $Q(-1{,}5|0{,}5|2{,}5)$

g durch P und F: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$

h durch R und Q: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -3{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

bzw. $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

$g \cap h$: $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix};\ t, r \in \mathbb{R}$

$t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix};\ t, r \in \mathbb{R}$

t	r		
1	-1	0	
0	3	1	
6	7	4	
1	-1	0	
0	1	$\frac{1}{3}$	$\Rightarrow r = \frac{1}{3}$
0	13	4	$\Rightarrow r = \frac{4}{13}$

$\left.\begin{array}{l} r = \frac{1}{3} \\ r = \frac{4}{13} \end{array}\right\}$ Widerspruch!

d.h. g und h sind **zueinander windschief.**

Aufgabe 15:

Aufstellung der Geradengleichungen:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$;

$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$; $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ u \in \mathbb{R}$.

Lagebeziehungen der Geraden:

I g und h:

$g \cap h$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ t, r \in \mathbb{R}$

$t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ t, r \in \mathbb{R}$

t	r		
-1	1	0	
4	-1	1	
1	-1	0	
-1	1	0	
3	0	1	$\Rightarrow t = \frac{1}{3}$
0	0	0	

$\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{4}{3} \\ 1 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{S\left(\frac{2}{3} \middle| \frac{7}{3} \middle| \frac{2}{3}\right)}}$ ist der Schnittpunkt von g und h.

Aufgabe 15:

II g und i:

g ∩ i: $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$; $t, s \in \mathbb{R}$

$t\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$; $t, s \in \mathbb{R}$

t	s	
1	-1	0
2	0	1
0	0	0

$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix}0+1\\1+2\\1-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$S(1|3|\frac{1}{2})$ ist der Schnittpunkt von g und i.

III g und K:

g ∩ K: $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $t, u \in \mathbb{R}$

$t\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $t, u \in \mathbb{R}$

t	u	
2	-1	0
1	0	$\frac{1}{4}$
1	0	0

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow t = \frac{1}{4}\\ \Rightarrow t = 0\end{array}\right\}$ Widerspruch!

d.h. g und K sind zueinander windschief.

IV h und i: Gemäß der Abbildung schneiden sich h und i in $E(2|3|0)$.

V h und K: Gemäß der Abbildung schneiden sich h und K in $B(0|2|1)$.

VI i und K:

i ∩ K: $\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $s, u \in \mathbb{R}$

$s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$; $s, u \in \mathbb{R}$

s	u	
2	-1	0
-1	0	0
0	0	-1

$\Rightarrow$ Widerspruch!

d.h. i und K sind zueinander windschief.

Aufgabe 16:

a) • (echt)parallel oder identisch? $k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} k=-1 \\ k=-\frac{1}{4} \\ k=-1 \end{matrix}\right\}$ Widerspruch

d.h. $\overrightarrow{r_{g_t}}$ und $\overrightarrow{r_{h_t}}$ sind linear unabhängig; d.h. keine Parallelität von g_t und h_t.

• $g_t \cap h_t = \{S_t\}$:

$$\begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4t \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \; ; \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 5 \\ 4t+2 \end{pmatrix} \; ; \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

r	s		
-1	-1	2+t	
4	1	5	
1	1	2t+1	
-1	-1	2+t	$\Rightarrow s = -2-1 = -3$
3	0	t+7	$\Rightarrow 3r = 6 \Rightarrow r = 2$
0	0	3t+3	$\Rightarrow 3t+3 = 0 \Rightarrow t = -1$

$$\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1+8 \\ -2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad S_{-1}(-1|9|-2)$$

• Für $t = -1$ schneiden sich g_{-1} und h_{-1} in $S_{-1}(-1|9|-2)$

• Für $t \neq -1$ sind g_t und h_t windschief zueinander.

b) (echt)parallel oder identisch? $k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ 4 \end{pmatrix}$

aus I folgt: $3k = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

II: $\frac{2}{3} \cdot (-6) = -4 = 2t \Rightarrow t = -2$

III: $\frac{2}{3} \cdot (-3t) = 4 \Rightarrow -2t = 4 \Rightarrow t = -2$

Für $t = -2$ sind $\overrightarrow{r_{g_2}}$ und $\overrightarrow{r_{h_2}}$ linear abhängig.

Punktprobe mit $P(3|4|2)$ in h_2:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow s \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} s = 1 \\ s = \frac{1}{4} \\ s = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \text{Widerspruch} \Rightarrow P \notin h_2$$

$\Rightarrow$ Für $t = -2$ sind g_{-2} und h_{-2} (echt) parallel.

• $g_t \cap h_t = \{S_t\}$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ 4 \end{pmatrix} \; ; \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -2t \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -t \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 16:

b)

r	s	
1	1	-2
-2	t	1
$-t$	2	2
2	2	-4
-2	t	1
$-t$	2	2
t	t	$-2t$
0	$t+2$	-3
0	$t+2$	$2-2t$

$\left.\begin{matrix} 0 & t+2 & -3 \\ 0 & t+2 & 2-2t \end{matrix}\right\} \quad 2-2t=-3 \Rightarrow -2t=-5 \Rightarrow t=\frac{5}{2}$

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{II})\quad \tfrac{9}{2}s = -3 \Rightarrow s = -\tfrac{2}{3} \\ &(\mathrm{I})\quad r = -2 + \tfrac{2}{3} = -\tfrac{4}{3} \end{aligned}\right\} \overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 3-\frac{4}{3} \\ 4+\frac{8}{3} \\ 2+\frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{20}{3} \\ \frac{16}{3} \end{pmatrix} \quad S_{\frac{5}{2}}\left(\tfrac{5}{3} \middle| \tfrac{20}{3} \middle| \tfrac{16}{3}\right)$$

- Für $t=\frac{5}{2}$ schneiden sich $g_{\frac{5}{2}}$ und $h_{\frac{5}{2}}$ in $S_{\frac{5}{2}}\left(\frac{5}{3} \middle| \frac{20}{3} \middle| \frac{16}{3}\right)$.
- Für $t \neq \frac{5}{2}$ und $t \neq -2$ verlaufen g_t und h_t windschief zueinander.

Aufgabe 17:

a) identisch:

lineare Abhängigkeit der Richtungsvektoren $\vec{r_g}$ und $\vec{r_h}$:

$$k \cdot \begin{pmatrix} b \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$$

(II) $3k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

(I) $\frac{1}{3} \cdot b = 3 \Rightarrow b = 9$

(III) $\frac{4}{3} = d$

$S(1|a|2)$ in h: $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-c \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$

(III) $\frac{4}{3}s = -1 \Rightarrow s = -\frac{3}{4}$

(I) $(-\frac{3}{4}) \cdot 3 = 1 - c \Rightarrow c = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$

(II) $a = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ Für $a = -\frac{3}{4}$; $b = 9$; $c = \frac{13}{4}$; $d = \frac{4}{3}$ sind g und h identisch.

b) Für $a \neq -\frac{3}{4}$ oder $c \neq \frac{13}{4}$ und $b = 9$ und $d = \frac{4}{3}$ sind g und h zueinander (echt) parallel.

Aufgabe 17: Anmerkung: sehr aufwendig und komplex!

c) $g \cap h = \{S\}$:

$$\begin{pmatrix}1\\a\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}b\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\0\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\d\end{pmatrix}; \quad r, s, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$r\cdot\begin{pmatrix}b\\3\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\\-d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c-1\\-a\\1\end{pmatrix}; \quad r, s, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

	r	s		
	3	-1	-a	$\cdot(-4)$
	4	-d	1	$\cdot 3$
	b	-3	c-1	
	-12	4	4a	
	12	-3d	3	
	b	-3	c-1	
	3	-1	-a	$\cdot(-b)$
	0	4-3d	4a+3	
	b	-3	c-1	$\cdot 3$
	-3b	b	ab	
	0	4-3d	4a+3	
	3b	-9	3c-3	
	3	-1	-a	
	0	4-3d	4a+3	$\cdot(9-b)$
(*)	0	b-9	3c-3+ab	$\cdot(4-3d)$
	3	-1	-a	
	0	4-3d	4a+3	
	0	0		

$$\longrightarrow (4a+3)\cdot(9-b) + (3c-3+ab)\cdot(4-3d)$$
$$= 36a - 4ab + 27 - 3b + 12c - 9cd - 12 + 9d + 4ab - 3abd$$
$$= -3abd - 9cd + 36a - 3b + 12c + 9d + 15$$

d.h. $-3abd - 9cd + 36a + 12c + 9d + 15 = 0 \quad |:(-3)$

$$\underline{\underline{abd + 3cd - 12a - 4c - 3d - 5 = 0}}; \quad \text{falls } b \neq 9 \text{ und } d \neq \tfrac{4}{3}$$

falls $b = 9$ und $d \neq \frac{4}{3}$: $\quad 3c - 3 + ab = 0 \quad (*)$

$$\Rightarrow 3c - 3 + 9a = 0 \quad |:3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{3a + c = 1}}$$

d) g und h sind windschief:

I falls $b \neq 9$ und $d \neq \frac{4}{3}$: $\quad abd + 3cd - 12a - 4c - 3d - 5 \neq 0$

II falls $b = 9$ und $d \neq \frac{4}{3}$: $\quad 3a + c \neq 1$

Aufgabe 18:

a) $x_3 = 0$; d.h. $P(x_1 | x_2 | 0)$

b) Durchstoßpunkte von g mit der...

- x_1x_2-Ebene ($x_3 = 0$): $7 - r = 0 \Rightarrow r = 7$

$$\vec{OR} = \begin{pmatrix} 2 - 14 \\ 3 + 35 \\ 7 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 38 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R(-12 | 38 | 0)$$

- x_1x_3-Ebene ($x_2 = 0$): $3 + 5r = 0 \Rightarrow r = -\frac{3}{5}$

$$\vec{OT} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{6}{5} \\ 3 - 3 \\ 7 + \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ 0 \\ \frac{38}{5} \end{pmatrix} \qquad T(\tfrac{16}{5} | 0 | \tfrac{38}{5})$$

- x_2x_3-Ebene ($x_1 = 0$): $2 - 2r = 0 \rightarrow r = 1$

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \\ 3 + 5 \\ 7 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad S(0 | 8 | 6)$$

c) d.h. die x_3-Komponente im Stützvektor ist ungleich 0 und die x_3-Komponente im Richtungsvektor ist gleich 0

z.B.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

d) d.h. die x_1- und x_3-Komponenten im Stützvektor sind ungleich 0 und die x_1- und x_3-Komponenten im Richtungsvektor sind gleich 0.

z.B.: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Kannst du das noch?

Aufgabe 6:

a) **Dreisatz "Je mehr - desto mehr" bzw. "Je weniger - desto weniger":**

Wenn ein Stapel von 500 Blatt Papier 6 cm hoch ist, dann ist ein Stapel von 1000 Blatt Papier 12 cm hoch.

(doppelte Anzahl Blatt Papier bedeutet doppelte Höhe; vorausgesetzt die Blattdicke ist immer gleich).

b) **Dreisatz "Je mehr - desto weniger" bzw. "Je weniger - desto mehr":**

Wenn zum Ausheben einer Baugrube drei Bagger acht Tage brauchen, dann brauchen sechs Bagger für die gleiche Arbeit nur vier Tage.

(doppelte Anzahl an Baggern bedeutet die Hälfte der Zeit, um die Arbeit zu erledigen; vorausgesetzt die Bagger verrichten die gleiche Leistung.)

Aufgabe 7:

I

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 10 \cdot 0{,}5 = 5 \\ a_2 &= 0{,}5 \cdot 10 = 5 \\ a_3 &= 4 \cdot 1{,}25 = 5 \end{aligned}\right\}$$

produktgleiche Wertepaare; d.h. es handelt sich um eine antiproportionale Zuordnung mit der Vorschrift $y = \frac{5}{x}$.

Ihr Graph ist eine Hyperbel.

II

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{0{,}5}{3{,}4} = \frac{5}{34} \\ m &= \frac{0{,}1}{0{,}68} = \frac{5}{34} \\ m &= \frac{1{,}5}{10{,}2} = \frac{5}{34} \end{aligned}\right\}$$

quotientengleiche Wertepaare; d.h. es handelt sich um eine proportionale Zuordnung mit der Vorschrift $y = \frac{5}{34}x$.

Ihr Graph ist eine Ursprungsgerade.

Aufgabe 8:

$x \mathrel{\hat=}$ Preis pro Person; $y =$ Preis Pauschale

I $50x + y = 430$

II $45x + y = 390$

x	y	
50	1	430
-45	-1	-390
50	1	430
5	0	40

$\Rightarrow y = 30$ (€)

$\Rightarrow x = 8$ (€)

d.h. $x = 8$ €/Person; $y = 30$ € Pauschale

$K = 48 \cdot x + y$

$K = 48 \cdot 8\text{ €} + 30\text{ €} = \underline{\underline{414\text{ €}}}$

Kostet der Museumsbesuch für eine Gruppe von 48 Personen.