S 24 Nr. 8

$f(x) = \sqrt{x}$; ges: $f'(x_0)$

$$m_{x_0}(h) = \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}$$

Es wird hier mit $\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}$ erweitert

Nun wird die 3 Binomische Formel im Zähler angewendet
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$m_{x_0}(h) = \frac{(\sqrt{x_0+h})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{h \cdot (\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \frac{\cancel{x_0} + \cancel{h} - \cancel{x_0}}{\cancel{h} \cdot (\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}$$

$$\lim_{h \to 0} m_{x_0}(h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x_0+h}}_{\to \sqrt{x_0} \text{ für } h \to 0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

S 24 Nr. 9

a) Verwende das Ergebnis aus Aufgabe 8)

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 10$ $\Rightarrow$ $f'(10) = \frac{1}{2\sqrt{10}}$

b) $f(x) = 2\sqrt{x}$; $f(x) = -3\sqrt{x}$ kann durch $f(x) = a \cdot \sqrt{x}$ verallgemeinert werden

$$m_{x_0}(h) = \frac{a \cdot \sqrt{x_0+h} - a\sqrt{x_0}}{h} = a \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h}}_{\text{ist identisch mit Term aus Aufgabe 8)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} a \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} = a \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = a \, \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = f'(x_0)$$

$\Rightarrow$ für $a = 2$ $\quad f(x) = 2\sqrt{x}$ $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

für $x_0 = 1$: $f'(x_0) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1$

$\Rightarrow$ für $a = -3$ und $x_0 = 8$ $\Rightarrow$ $f(x) = -3\sqrt{x}$; $f'(x_0) = -\frac{3}{2\sqrt{x_0}}$ $\Rightarrow f'(8) = \frac{-3}{2\sqrt{8}}$